Équivalence entre problèmes de graphes
Fiche pédagogique

1 Présentation de l'activité

Le but de cette activité est d'illustrer l'équivalence entre plusieurs problèmes d'optimisation, une notion fondamentale en théorie de la complexité algorithmique et pour la conception d'algorithmes efficaces (voir fiche scientifique). Cette activité permet également de découvrir la notion de graphes et la modélisation de problèmes concrets par les graphes.
Nous allons considérer pour cela trois problèmes de graphes : l'ensemble indépendant, la clique, et la couverture par sommets. Cette activité est structurée en étapes, consistant d'abord à se familiariser avec l'un des problèmes en essayant de le résoudre à la main sur de petits graphes. Dans un second temps, on voit comment transformer les graphes pour le problème de la clique afin de se ramener au problème de l'ensemble indépendant. Dans un troisième temps, on montre que le problème de la couverture par sommets est complémentaire du problème de l'ensemble indépendant. Ainsi, on montre que ces trois problèmes sont équivalents.
Cette activité peut être faite en classe entière (jusqu'à une trentaine d'élèves). Elle est modulaire, avec trois variantes possibles en fonction du temps disponible (voir Figure 1) :

— La totalité de l'activité, en 1h environ
— Seulement l'ensemble indépendant et la clique, en 45min environ
— Seulement l'ensemble indépendant et la couverture par sommets, en 30min environ

Pour chacune de ces trois variantes, des graphes challenge (fiche numéro 5) peuvent être distribués pour occuper le temps restant si l'activité se termine rapidement, mais aussi donnés aux élèves qui vont plus vite. Attention néanmoins à se réserver quelques minutes pour conclure, et à recentrer l'attention en changeant de situation si les graphes challenge sont distribués aux élèves plus rapides. Voir la Section 8 pour ces challenges.
Notez par ailleurs que les diapos fournies servent de support de base : il est aussi possible de présenter les concepts via des dessins au tableau, par exemple.
Toutes les solutions sont fournies dans la fiche de solutions (fiche numéro 6).

2 Situation déclenchante - modéliser avec des graphes

Objectif : Comprendre la notion de graphe et la modélisation de problèmes concrets par des graphes

Matériel : Un ordinateur et un vidéo-projecteur (peut être fait au tableau si nécessaire).

Durée : 5 minutes.

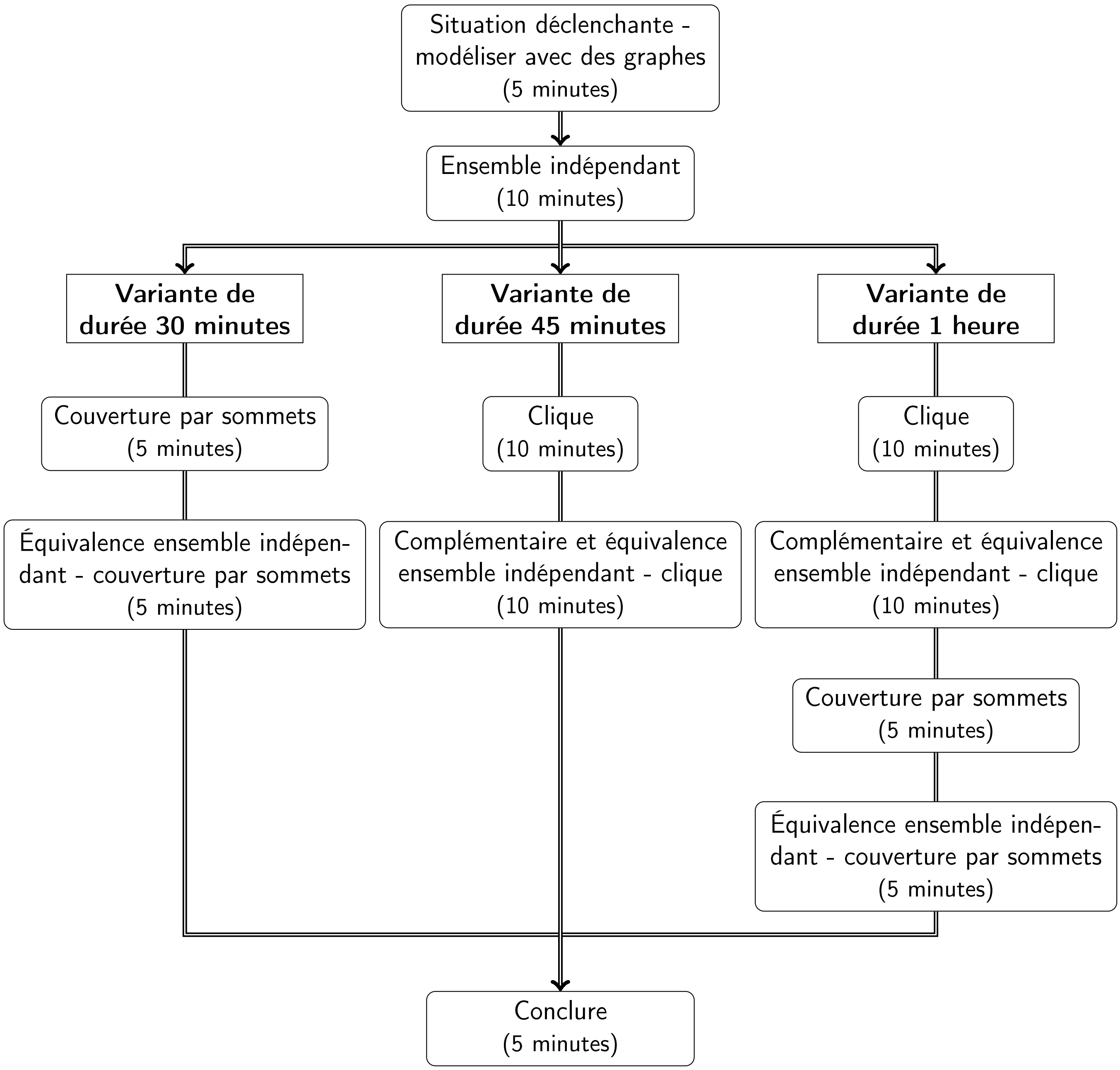


FIGURE 1 – Les trois variantes possibles de l'activité. Les graphes challenge occupent le temps restant pour les créneaux plus longs (distribuer à la fin de l'activité, mais avant de conclure, et bien se réserver un temps pour la conclusion), mais peuvent aussi être distribués à tout moment aux groupes les plus rapides (attention cependant à reprendre l'attention au moment de changer d'activité).

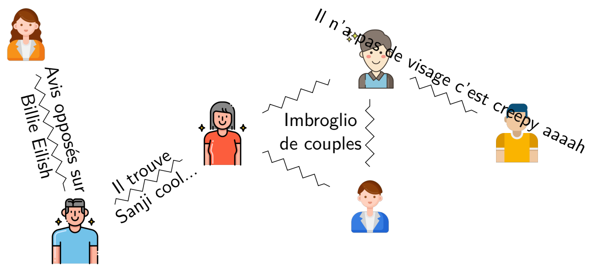
Mise en situation : Le professeur déroule les diapositives en expliquant et motivant les notions étudiées :

— Diapo 1. Premier problème : organiser une fête en invitant le maximum d'amis sans conflits entre invités.

Organiser une fête

Objectif

Inviter **le plus** d'amis possible ! En **évitant les conflits**...

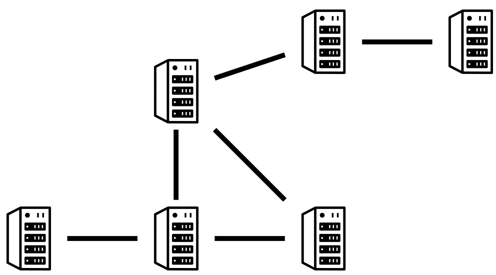


— Diapo 2. Deuxième problème : trouver un gros cluster dans un réseau informatique : un "cluster" est un ensemble de machines toutes reliées les unes aux autres.

Faciliter du calcul parallèle

Objectif

Trouver **un gros** cluster pour accélérer les échanges de données.

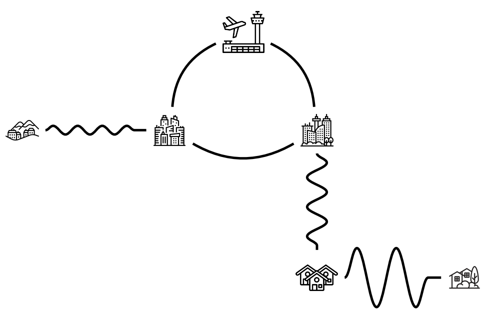


— Diapo 3. Troisième problème : disposer des postes de secours au niveau des infrastructures d'un réseau routier (villages, villes, aéroport), de façon à ce que chaque route soit desservie par un poste de secours. On doit de plus composer avec des restrictions budgétaires et on utilise donc aussi peu de postes de secours que possible.

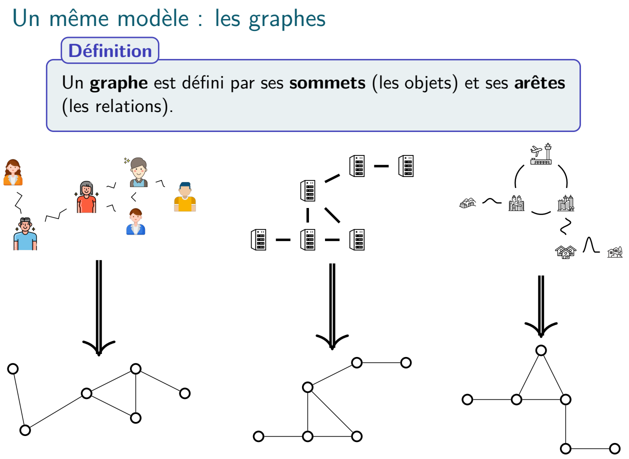
Permettre des interventions en cas d'accidents

Objectif

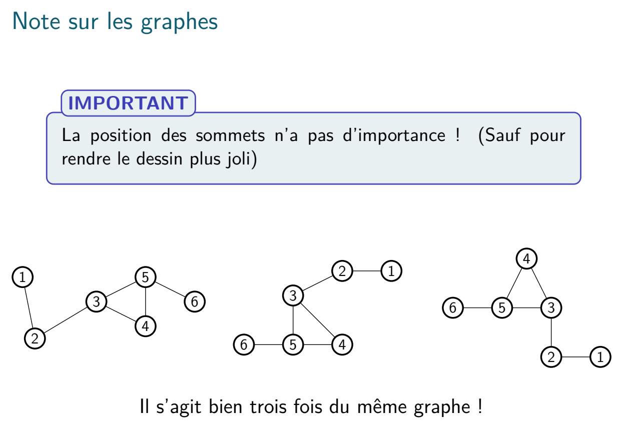
Placer **le moins** de véhicules de secours pour couvrir les routes.



— Diapo 4. Ces trois problèmes en apparence différents peuvent tous être modélisés par un graphe. Pour le problème de la fête, les amis sont les sommets du graphe, et les conflits sont représentés par les arêtes. Pour le problème du cluster, les machines sont les sommets du graphe, et les connexions directes entre machines sont les arêtes. Pour le problème des postes de secours, les infrastructures sont les sommets du graphe, et les routes sont les arêtes. Il est important de noter le point commun entre ces trois situations, qui est qu'on a des **objets** (y compris des individus) mis en **relation** : les sommets sont les objets, les arêtes représentent les relations entre ces objets.



— Diapo 5. On précise un point très important dans l'étude des graphes en informatique : la position des sommets n'est pas importante, c'est bien l'identité des sommets et les arêtes entre eux qui le définissent. On a ici plusieurs représentations différentes du même graphe, ce qu'on voit bien en numérotant les sommets.



Conclusion : Les graphes permettent de modéliser plusieurs problèmes de la vie courante dès lors qu'on a des objets et que certains sont en relation les uns avec les autres. Il s'agit d'objets mathématiques génériques qui servent à abstraire des problèmes pour ensuite les résoudre.

3 L'ensemble indépendant de taille maximum

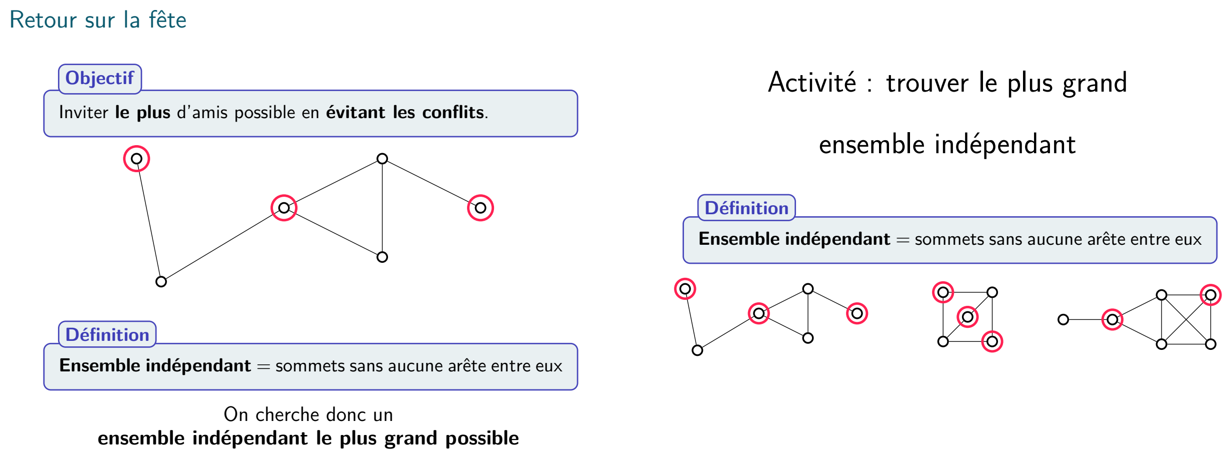
Objectif : Comprendre la notion d'ensemble indépendant d'un graphe.

Organisation : Répartir la classe en groupes de 3 à 4 élèves.

Matériel : Deux copies de la fiche "ensemble indépendant" (fiche numéro 1) au format A4 pour chaque groupe d'élèves.

Durée : 10 minutes.

Mise en situation : Projeter les diapos 6-7 rappelant le problème de la fête et définissant la notion d'ensemble indépendant. Distribuer les feuilles et demander aux élèves de trouver les ensembles indépendants les plus grands possibles en entourant les sommets. Ils peuvent discuter et le faire par groupe.



Conclusion : Montrer les solutions optimales sur la feuille A3 ou au tableau.

4 La clique de taille maximum

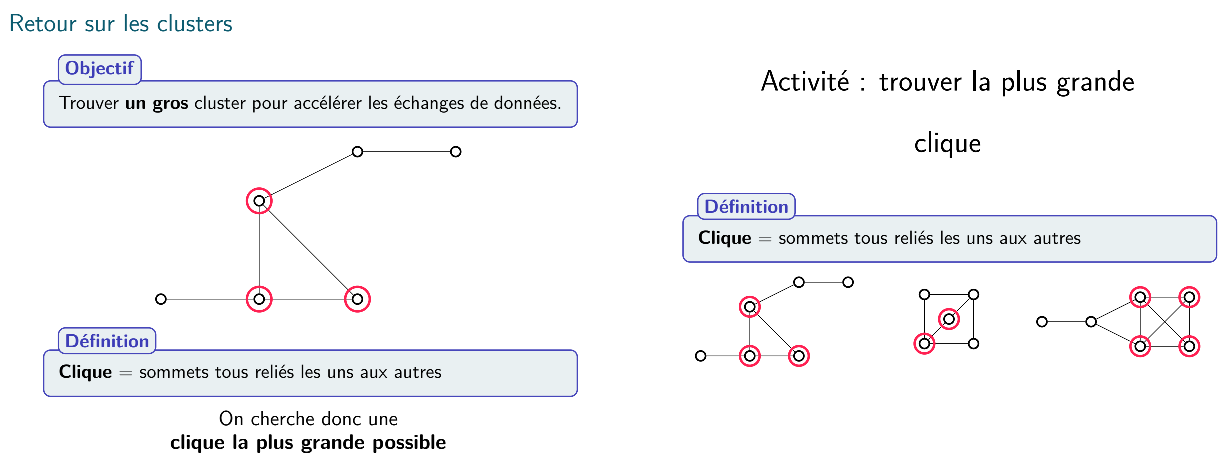
Objectif : Comprendre la notion de clique d'un graphe.

Organisation : Répartir la classe en groupes de 3 à 4 élèves.

Matériel : Deux copies de la fiche "clique" (fiche numéro 2) au format A4 pour chaque groupe d'élèves.

Durée : 10 minutes.

Mise en situation : Projeter les diapos 8-9 rappelant le problème du cluster d'ordinateurs et définissant la notion de clique. Distribuer les feuilles et demander aux élèves de trouver les cliques les plus grandes possibles en entourant les sommets. Ils peuvent discuter et le faire par groupe.



Conclusion : Montrer les solutions optimales sur la feuille A3 ou au tableau.

5 Graphe complémentaire et équivalence entre ensemble indépendant et clique

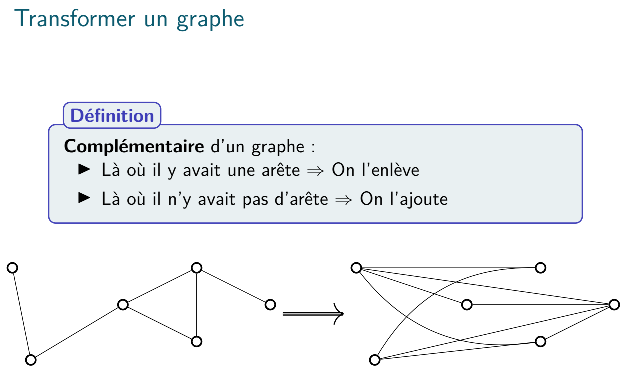
Objectif : Comprendre la notion de complémentaire d'un graphe, et la relation entre clique maximum d'un graphe et ensemble indépendant maximum du complémentaire du graphe.

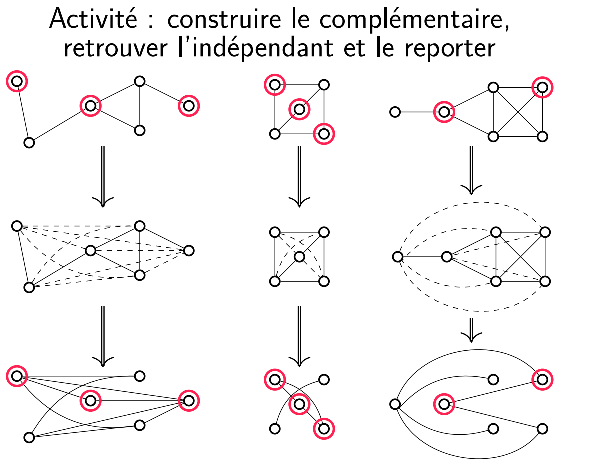
Organisation : Répartir la classe en groupes de 3 à 4 élèves.

Matériel : Deux copies de la fiche "complémentaire" (fiche numéro 3) au format A4 pour chaque groupe d'élèves.

Durée : 10 minutes.

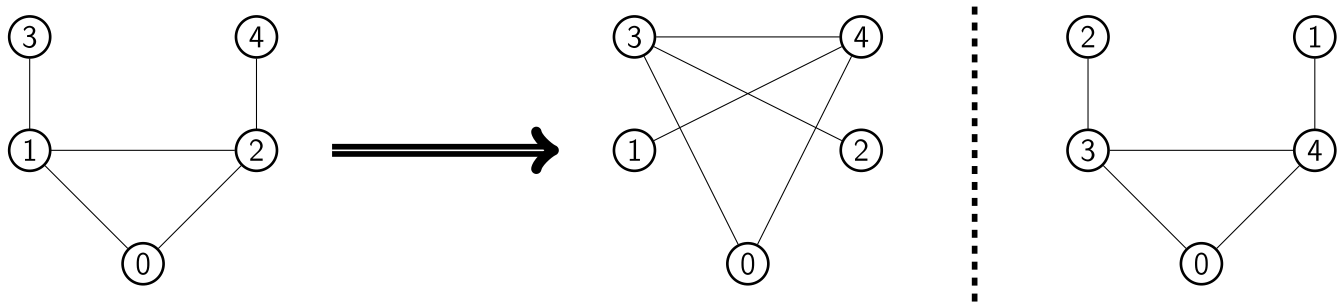
Mise en situation : Projeter les diapos 10-11 illustrant et définissant la notion de complémentaire d'un graphe. Distribuer les feuilles et demander aux élèves de tracer le complémentaire du graphe. Il y a trois colonnes : la première contient les graphes de l'activité "ensemble indépendant", la deuxième et la troisième contiennent deux dispositions différentes des sommets. Dans la deuxième colonne, les sommets sont disposés comme dans la première colonne. Dans la troisième colonne, les sommets sont disposés de façon à obtenir un dessin plus joli (accessoirement, ce sont les graphes de l'activité "clique" !). Les élèves doivent tracer les complémentaires en respectant les numéros des sommets. Les élèves peuvent discuter et travailler par groupe.





Conseil : Selon la compréhension des élèves, il est conseillé de faire le premier exemple au tableau de façon explicite afin de montrer la méthode de construction du complémentaire (prendre le sommet 0, regarder avec qui il n'est pas voisin et tracer ses arêtes-là, continuer avec le sommet 1, etc).

Deuxième étape : Demander aux élèves de reporter les ensembles indépendants obtenus pendant l'activité "ensemble indépendant" sur les graphes de la colonne de gauche, et d'entourer les sommets du même ensemble sur les graphes complémentaires des colonnes de droite. Ils peuvent remarquer que l'ensemble indépendant du graphe originel devient une clique dans son complémentaire.



Note pédagogique : On remarque que le cycle à 5 sommets et le graphe de la "tête de taureau" sont auto-complémentaires ! C'est une jolie propriété mais qui est très rare, la plupart des graphes ne sont pas auto-complémentaires.

Conclusion : Les deux problèmes (ensemble indépendant et clique) sont équivalents : si on connaît la solution optimale pour l'un des deux problèmes dans un graphe, on obtient directement la solution optimale de l'autre problème dans le complémentaire du même graphe.

6 La couverture par sommets de taille minimum

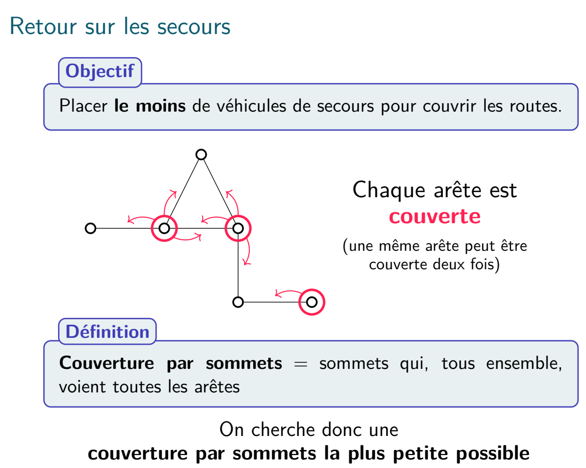
Objectif : Comprendre la notion de couverture par sommets d'un graphe.

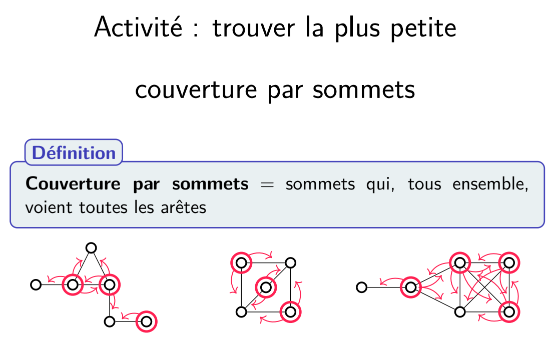
Organisation : Répartir la classe en groupes de 3 à 4 élèves.

Matériel : Deux copies de la fiche "couverture par sommets" (fiche numéro 4 recto) au format A4 pour chaque groupe d'élèves.

Durée : 5 minutes.

Mise en situation : Projeter les diapos 12-13 rappelant le problème des postes de secours et définissant la notion de couverture par sommets. Bien souligner qu'une arête peut être couverte par deux sommets différents. Distribuer les feuilles et demander aux élèves de trouver les couvertures par sommets les plus petites possibles en entourant les sommets. Ils peuvent discuter et le faire par groupe.





Conclusion : Montrer les solutions optimales sur la feuille A3 ou au tableau.

7 Équivalence entre ensemble indépendant et couverture par sommets

Objectif : Comprendre l'équivalence entre l'ensemble indépendant et la couverture par sommets minimum d'un graphe.

Organisation : Répartir la classe en groupes de 3 à 4 élèves.

Matériel : Deux copies de la fiche "ensemble indépendant et couverture par sommets" (fiche numéro 4 verso) au format A4 pour chaque groupe d'élèves.

Durée : 5 minutes.

Mise en situation : Distribuer les feuilles et demander aux élèves de reporter pour chaque graphe, la couverture par sommets obtenue, ainsi que la taille des solutions trouvées aux activités "ensemble indépendant" et "couverture par sommets". Demander s'ils observent quelque chose.

Conclusion : On remarque que la somme des deux est égale au nombre de sommets du graphe. En fait, les sommets qui ne font pas partie de la couverture par sommets minimum forment un ensemble indépendant maximum ! Ainsi, les deux problèmes sont équivalents : si on en résout un dans un graphe, on obtient immédiatement la solution de l'autre en prenant les autres sommets. C'est un deuxième exemple de réduction entre deux problèmes de graphes. Cette fois-ci il n'est même pas nécessaire de transformer le graphe.

8 Challenges

S'il reste du temps, on peut distribuer aux élèves les fiches "challenges" (fiche numéro 5) qui contiennent des graphes où il est plus difficile de trouver les solutions optimales. Il y a une page recto-verso avec des challenges pour l'ensemble indépendant de taille maximale (utilisables également pour la couverture par sommets de taille minimale), et une page avec des challenges pour la clique de taille maximale.
Pour ces graphes, ne pas forcément donner la solution, simplement dire aux élèves s'ils ont trouvé la meilleure valeur possible.

9 Conclure

On peut faire une petite conclusion pour clôturer l'activité.

Résumé

Ce qu'on a appris

- Les **graphes** sont un modèle générique pour différentes situations où des **objets** sont **en relation**
- Des questions concrètes se traduisent par des problèmes de graphes
- On peut **transformer** les graphes pour aider à résoudre les problèmes

Pour aller plus loin

- Cheminement dans les graphes : le problèmes des **ponts de Königsberg**
- Coloration et structure : combien de **couleurs** sont **nécessaires et suffisantes** pour **colorier une carte sans que deux régions adjacentes aient la même couleur** ?

Tout d'abord, les graphes permettent de modéliser des problèmes variés. Outre ceux vus dans l'activité, il existe une énorme quantité de problèmes de graphes qui ont été étudiés, dont certains sont assez connus comme la coloration de graphes, les chemins Hamiltoniens, les cycles Eulériens, etc.
De plus, on a vu un ou deux exemples de réductions entre problèmes de graphe. On peut rapidement expliquer le principe de ce concept. Supposons par exemple qu'on ait un algorithme $\mathcal{A}$ qui calcule l'ensemble indépendant maximum d'un graphe G.
On peut alors utiliser $\mathcal{A}$ pour concevoir un algorithme qui calcule la clique maximum d'un graphe :

1. Calculer le complémentaire $\overline{G}$ de G
2. Appliquer $\mathcal{A}$ à $\overline{G}$ pour obtenir un ensemble indépendant maximum S de $\overline{G}$
3. Cet ensemble S est aussi une clique maximum de G

On peut faire quelque chose de similaire pour la couverture par sommets :

1. Appliquer $\mathcal{A}$ à G pour obtenir un ensemble indépendant maximum S de G
2. Les sommets qui ne sont pas dans S forment une couverture par sommets minimum de G

Ce principe, appelé *réduction*, est souvent utilisé en algorithmique, et permet de résoudre certains problèmes en transformant les entrées et en ré-utilisant des algorithmes déjà existants pour d'autres problèmes (ce qui nécessite généralement de transformer les entrées et les résultats).
On peut enfin évoquer quelques autres problèmes classiques de théorie des graphes, provenant de situations réelles. Nous avons choisi de mettre en avant les **ponts de Königsberg** et la **coloration de carte**, sur lesquels de nombreuses ressources peuvent être trouvées.

Conception et rédaction par Antoine Dailly et Florent Foucaud, avec l'aide et la relecture du groupe ISO.