# Les courbes de Bézier

## 1 L'essentiel

### 1.1 Origines

Pierre Bézier.

Paul de Casteljau.

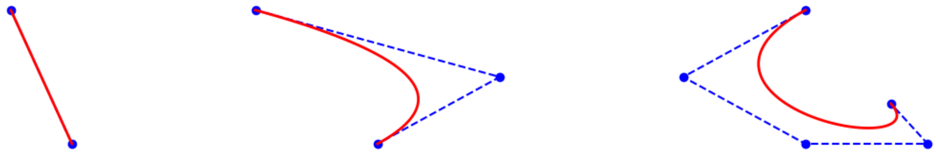
Pierre Bézier était un ingénieur français en mécanique et en électricité travaillant chez Renault. En 1962, il a inventé les courbes qui portent son nom et, plus tard, les surfaces de Bézier, pour construire des courbes et des surfaces lisses. Son objectif était la modélisation numérique de carrosseries de voitures. Ses travaux ont été réutilisés au début des années 1980 par la société Adobe pour élaborer le langage de description de pages PostScript, un format informatique quasiment universel, jusqu'à ce qu'il soit progressivement remplacé par le format PDF.
L'algorithme de construction des courbes de Bézier (ou plutôt des courbes représentatives des polynômes de Bernstein, voir ci-dessous) présenté dans cette activité a été inventé, dès 1958, par Paul de Casteljau, un mathématicien français travaillant chez Citroën. La contribution de Paul de Casteljau est moins connue que celle de Pierre Bézier, car il était soumis à une clause de confidentialité concernant ses travaux, qui n'a pas été levée par son employeur avant 1985.
De nos jours, les courbes de Bézier ont de nombreuses applications en *graphisme par ordinateur* (ex : outil « plume » sous Gimp ou Photoshop), pour le rendu des *polices de caractères*, pour encoder les images vectorielles, etc. L'activité est une initiation à l'utilisation de courbes de Bézier pour les polices de caractères.

### 1.2 Présentation générale

1. *Exemples de courbes de Bézier* :

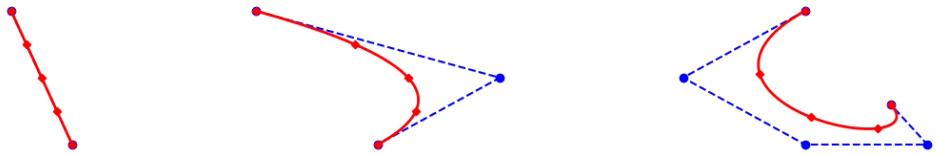
2. Une courbe de Bézier est définie par un certain nombre de *points de contrôle*. Leurs positions déterminent totalement la forme de la courbe. La courbe part du premier point de contrôle, et termine au dernier. Par contre, elle ne passe en général pas par les points de contrôle intermédiaires ; ceux-ci servent uniquement à définir la « forme globale » de la courbe. Nous allons progressivement découvrir les formules mathématiques qui définissent le tracé à partir des points de contrôle.

   *Les 3 courbes précédentes, où sont également représentés les points de contrôle* :



3. Mathématiquement, une courbe de Bézier est une *courbe polynomiale*, indexée par un paramètre $t$ qui varie continûment de 0 à 1. C'est-à-dire que les coordonnées de ses points s'obtiennent par un calcul $(P(t), Q(t))$, où $P$ et $Q$ sont des polynômes. Elle démarre en $t = 0$, qui correspond au premier point de contrôle, et finit en $t = 1$ qui correspond au dernier point de contrôle. Les polynômes intervenant dans la définition de ces courbes sont appelés *polynômes de Bernstein*.

   *Les 3 courbes précédentes, où sont mis en évidence les points associés aux paramètres* $t = 0$, $t = 0,25$, $t = 0,5$, $t = 0,75$ *et* $t = 1$ *:*

4. Le nombre de points de contrôle détermine la complexité de la courbe. De manière générale, si la courbe possède $N + 1$ points de contrôle, alors les polynômes la définissant sont de degré $N$ (c'est-à-dire de la forme $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_N t^N$). Ce nombre $N$ s'appelle l'*ordre* de la courbe. En particulier :
   - Une courbe avec 2 points de contrôle est d'ordre 1, donc un segment de droite.
   - Une courbe avec 3 points de contrôle est d'ordre 2, donc un segment de parabole.

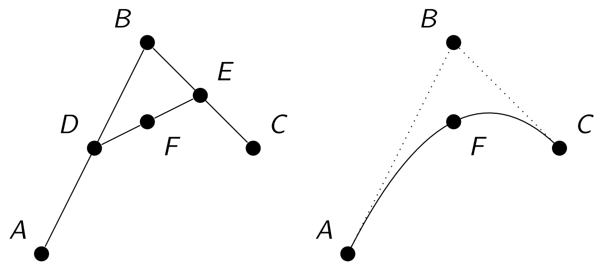
   *Ainsi, dans les exemples précédents, la première courbe est d'ordre 1, la deuxième est d'ordre 2, et la troisième est d'ordre 4.*

## 1.3 Algorithme de Casteljau

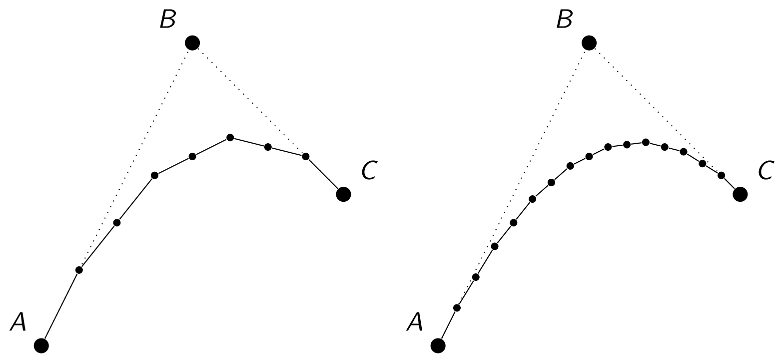
Les courbes de Bézier les plus utilisées sont celles d'ordre 3 (elles ont 4 points de contrôle), mais ce ne sont pas celles présentées dans l'activité, par souci de simplicité. Les courbes de Bézier utilisées sont dites « quadratiques » (c'est-à-dire de degré 2) et sont définies par trois points de contrôle : le point de départ A, le point d'arrivée C et un point auxiliaire B.
À partir des trois points A, B et C, l'objectif est de construire une courbe allant du point A au point C et qui ait pour tangente les droites (AB) et (BC). Pour comprendre la forme d'une telle courbe, il faut imaginer entre les points A et C un fil de métal souple, qui est attiré par l'aimant qu'est le point de contrôle B. Plus une partie du fil se trouve près de l'aimant, plus elle est attirée et se déforme (voir la figure ci-dessous à droite).
L'algorithme de construction géométrique des courbes de Bézier présenté dans cette activité se généralise à des courbes d'ordre supérieur.
Pour construire la courbe de Bézier de points de contrôle A, B et C, il suffit, pour commencer, de remplacer la ligne brisée ABC par les deux lignes brisées ADF et FEC où :

- D est le milieu de [AB]
- E est le milieu de [BC]
- F est le milieu de [DE]

Il faut noter que D et E sont des points auxiliaires, tandis que F est un point de la courbe finale (voir la figure ci-dessous à gauche).




Il faut ensuite recommencer le processus sur les deux nouvelles lignes brisées construites ADF et FEC. Après de nombreuses itérations, le résultat est une courbe lisse, passant par A et C et tangente aux droites (AB) et (BC) (voir la figure ci-dessus à droite). Dans la pratique, il suffit de quelques itérations pour avoir une approximation satisfaisante, comme le montrent les figures ci-dessous, obtenues avec 2, puis 3 itérations.




## 1.4 Les images vectorielles

Il est possible de classer les formats d'images en deux grandes familles :

- Les images dites « matricielles » (*BitMap*), peuvent représenter des photos, des dessins, des plans, etc. Ces images en couleur ou noir et blanc sont constituées de tous les points (*pixels*) de l'image. Agrandir ou rétrécir ces images pose certains problèmes afin de déterminer les pixels de la nouvelle image. En revanche, elles sont souvent d'une grande qualité car elles contiennent tous les détails très fins permis par la résolution matérielle de l'appareil.
- Les images dites « vectorielles », sont formées de courbes qui définissent des formes à l'aide d'équations. Même pour des formes complexes, les images vectorielles nécessitent moins de place en mémoire que les images BitMap. De plus elles supportent parfaitement le changement d'échelle.

À gauche une image vectorielle d'un abricot et à droite l'image matricielle du même objet.

La figure ci-dessus montre une image vectorielle d'un abricot qui n'est pas détériorée par le changement d'échelle, alors que l'image matricielle du même objet ne passe pas correctement à l'échelle. Les images vectorielles utilisent moins d'espace mémoire que les images matricielles et passent sans déformation à l'échelle. Ces images sont constituées uniquement d'équations, de formules qui permettent de tracer les courbes les constituant. Les courbes de Bézier sont un des types de courbes souvent utilisées dans ces images. Ainsi, les polices de caractères vectorielles peuvent être agrandies à n'importe quelle taille sans perte de qualité.

La lecture de la section 1 est suffisante pour animer l'activité en classe. Les lecteurs désireux d'en savoir un peu plus sur les aspects mathématiques des courbes de Bézier trouveront plus de détails dans les sections suivantes.

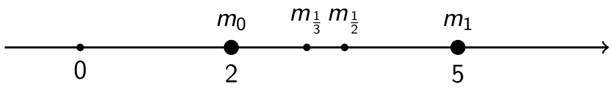
# 2 Courbes de Bézier d'ordres 1 et 2

## 2.1 Moyenne pondérée

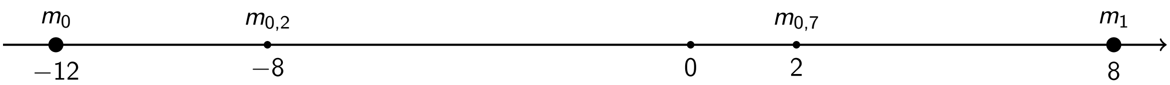
Les courbes de Bézier reposent crucialement sur des calculs de *moyenne pondérée* (aussi appelée *barycentre*) au sein d'un ensemble de points. Cette notion est présentée ci-dessous.
Soit $t$ un nombre réel entre 0 et 1. Pour tous nombres $a$ et $b$, leur moyenne pondérée de poids $(1-t, t)$ est le nombre :

$$m_t = (1-t)a + tb$$

Voici quelques exemples :
- avec $a = 2$, $b = 5$ et $t = 1/2$, on obtient : $m_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2} \times 5 = \frac{7}{2}$.
- avec $a = 2$, $b = 5$ et $t = 1/3$, on obtient : $m_{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \times 2 + \frac{1}{3} \times 5 = 3$.
- avec $a = 2$, $b = 5$ et $t = 0$, on obtient : $m_0 = 1 \times 2 + 0 \times 5 = 2$.
- avec $a = 2$, $b = 5$ et $t = 1$, on obtient : $m_1 = 0 \times 2 + 1 \times 5 = 5$.




- avec $a = -12$, $b = 8$ et $t = 0{,}7$, on obtient : $m_{0,7} = 0{,}3 \times (-12) + 0{,}7 \times 8 = 2$.
- avec $a = -12$, $b = 8$ et $t = 0{,}2$, on obtient : $m_{0,2} = 0{,}8 \times (-12) + 0{,}2 \times 8 = -8$.




L'expression $m_t = (1-t)a + tb$ peut être réécrite sous la forme $m_t = a + t(b-a)$. On peut interpréter cette dernière formule de la façon suivante : sur la droite réelle, $b-a$ est la mesure algébrique du segment $[a; b]$, donc $m_t$ est obtenu en partant de $a$ et en se déplaçant d'une fraction $t$ de la mesure $b-a$.

## 2.2 Courbe de Bézier d'ordre 1

Étant donnés deux points du plan $A$ et $B$, la courbe de Bézier associée aux points de contrôle $(A, B)$ est définie par :

$$F(t) = (1-t)A + tB \qquad \text{pour tout } t \in [0; 1]$$

Avec des mots, le point $F(t)$ de la courbe est obtenu comme la moyenne pondérée des points $A$ et $B$, avec les poids $(1-t; t)$.
Voici quelques exemples avec les points $A = (1; 1)$ et $B = (-2; 5)$ :
- pour $t = 0$ :

$$F(0) = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A$$

- pour $t = 0{,}2$ :

$$F(0{,}2) = 0{,}8 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0{,}2 \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 1{,}8 \end{pmatrix}$$

- pour $t = 0{,}5$ :

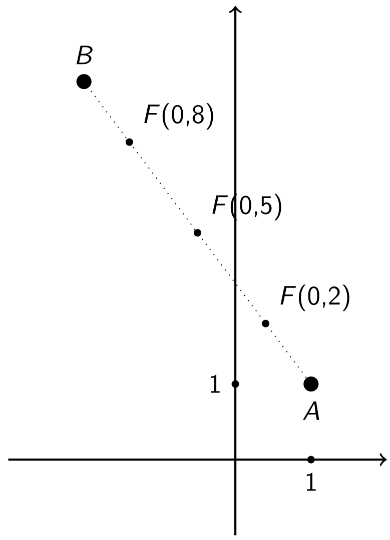
$$F(0{,}5) = 0{,}5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0{,}5 \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- pour $t = 0{,}8$ :

$$F(0{,}8) = 0{,}2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0{,}8 \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}4 \\ 4{,}2 \end{pmatrix}$$

- pour $t = 1$ :

$$F(1) = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = B$$




Ils sont alignés, de plus $F(0) = A$ et $F(1) = B$. La courbe dans son ensemble correspond au segment $[AB]$.

## 2.3 Courbe de Bézier d'ordre 2

Étant donnés trois points du plan $A$, $B$ et $C$, la courbe de Bézier associée aux points de contrôle $(A, B, C)$ est définie par :

$$F(t) = (1-t)\big[(1-t)A + tB\big] + t\big[(1-t)B + tC\big] \text{ pour tout } t \in [0;1]$$

Cette formule peut être "comprise" de plusieurs façons, et chaque façon mène à une méthode différente pour tracer la courbe $F(t)$.

**Rappel :** Les courbes de Bézier d'ordre 2 sont celles qui sont utilisées dans l'activité.

**Première méthode : géométrique**
On choisit une valeur $t$ fixée (pour l'instant), et on introduit les points "intermédiaires" suivants :

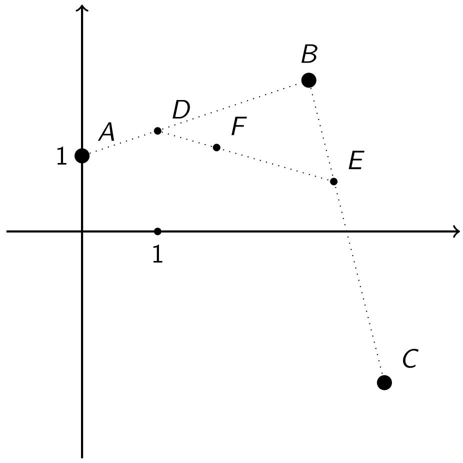
$$D_t = (1-t)A + tB$$
$$E_t = (1-t)B + tC$$

$D_t$ est la moyenne pondérée de $A$ et $B$ de poids $(1-t; t)$. Il se trouve donc sur le segment $[AB]$, à une fraction $t$ depuis le point $A$. De même pour $E_t$, entre les points $B$ et $C$. Ces deux points ne font pas partie de la courbe.
Ensuite, on a

$$F(t) = (1-t)D_t + tE_t$$

donc $F(t)$ se trouve sur le segment $[D_t, E_t]$, à une fraction $t$ depuis le point $D_t$. Le point $F(t)$ est un point de la courbe.
Par exemple, voici le tracé du point $F(1/3)$ associé aux points de contrôle $A = (0;1)$, $B = (3;2)$, $C = (4;-2)$.

Pour tracer d'autres points de la courbe, il faut prendre d'autres valeurs de $t$. Ainsi, échantillonner $t$ par pas de $0,01$ entre 0 et 1 permet d'obtenir 101 points de la courbe.




**Deuxième méthode : en coordonnées**
En développant la formule initiale pour $F(t)$, on trouve :

$$F(t) = (1-t)^2.A + 2t(1-t).B + t^2.C$$

Par exemple, on utilise cette formule pour calculer les coordonnées du point $F(1/3)$.

$$F(1/3) = (2/3)^2 . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 21/3.2/3. \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + (1/3)^2 . \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad = \begin{pmatrix} 16/9 \\ 10/9 \end{pmatrix} \quad \simeq \begin{pmatrix} 1{,}8 \\ 1{,}1 \end{pmatrix}$$

Étant donnés 3 nombres positifs $x, y, z$, on rappelle que le *barycentre* des points $A$, $B$, $C$ avec les pondérations $x, y, z$ est défini par :

$$M = \frac{xA + yB + zC}{x + y + z}$$

et qu'il se situe toujours à l'intérieur du triangle $ABC$.
Or, on remarque que :

$$\begin{aligned} (1-t)^2 + 2t(1-t) + t^2 &= ((1-t) + t)^2 && \text{(identité remarquable)} \\ &= 1^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

On remarque aussi que $(1-t)^2 \geq 0$, $2t(1-t) \geq 0$ et $t^2 \geq 0$, et on a donc :

$$\frac{(1-t)^2.A + 2t(1-t).B + t^2.C}{(1-t)^2 + 2t(1-t) + t^2} \quad = \frac{F(t)}{1} \quad = F(t)$$

C'est-à-dire que $F(t)$ est le barycentre des points $A$, $B$, $C$ associé aux poids $(1-t)^2, 2t(1-t), t^2$, et il est donc toujours contenu dans le triangle $ABC$.
Autrement dit, l'ensemble de la courbe de Bézier d'ordre 2 de points de contrôle $A$, $B$ et $C$ est intégralement contenue dans le triangle $ABC$.

# 3 Courbe de Bézier d'ordre quelconque

Les courbes de Bézier peuvent être définies par récurrence sur le nombre de point de contrôles, noté $N+1$ :

- *Initialisation :* une courbe de Bézier d'ordre $N = 0$, définie par un point de contrôle $P_0$, est simplement égale à ce point de contrôle, quelle que soit la valeur de $t$ :

$$F(t|P_0) = P_0$$

Cette notation représente le point $F$ correspondant au paramètre $t$, de la courbe définie par le point de contrôle $P_0$.

- *Relation de récurrence :* une courbe de Bézier d'ordre $N > 0$ se construit comme une moyenne pondérée de deux courbes de Bézier d'ordre $N-1$, via la formule :

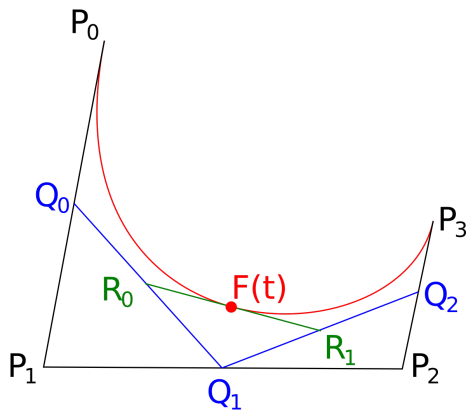
$$F(t|P_0, \dots, P_N) = (1-t)F(t|P_0, \dots, P_{N-1}) + tF(t|P_1, \dots, P_N)$$

Pour $N = 1$ et $N = 2$, on retrouve les constructions précédentes :

$$F(t|P_0, P_1) = (1-t)F(t|P_0) + tF(t|P_1)$$

$$F(t|P_0, P_1, P_2) = (1-t)F(t|P_0, P_1) + tF(t|P_1, P_2)$$

Dans le cas d'une courbe de Bézier d'ordre 2, on retrouve la formule avec les points intermédiaires $D_t$ et $E_t$.
Nous généralisons maintenant la construction pour une courbe de Bézier d'ordre 3, c'est-à-dire avec quatre points de contrôle, comme dans la figure ci-dessous (adaptée de Wikipedia) :




La courbe de Bézier d'ordre 3, associée aux points $P_0, P_1, P_2$ et $P_3$, peut être définie par une moyenne pondérée de deux courbes de Bézier d'ordre 2, par la formule suivante :

$$F(t|P_0, P_1, P_2, P_3) = (1-t)F(t|P_0, P_1, P_2) + tF(t|P_1, P_2, P_3)$$

Dans la figure précédente, chaque point est ainsi associé à un calcul :

- $Q_0 = F(t|P_0, P_1)$
- $Q_1 = F(t|P_1, P_2)$
- $Q_2 = F(t|P_2, P_3)$
- $R_0 = F(t|P_0, P_1, P_2)$
- $R_1 = F(t|P_1, P_2, P_3)$
- $F(t) = F(t|P_0, P_1, P_2, P_3)$

## 3.1 Méthode géométrique : Algorithme de Casteljau

L'*algorithme de Casteljau* est une des méthodes classiques pour construire une courbe de Bézier à partir de ses points de contrôle. Il est basé sur un calcul par récurrence : une courbe de Bézier d'ordre $N+1$ peut toujours se calculer comme la moyenne pondérée de deux courbes de Bézier d'ordre $N$.
Voici la définition générale de l'algorithme, et son illustration :

**Courbes de Bézier : algorithme de Casteljau**

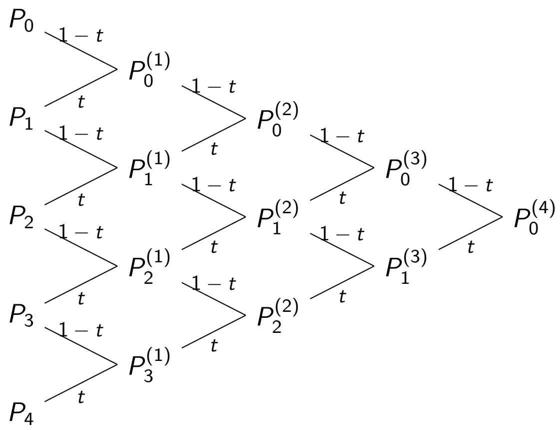
Soient $N+1$ points de contrôle $P_0, \dots, P_N$, et un nombre $t \in [0,1]$ *fixé*. L'algorithme suivant permet de calculer les coordonnées du point $F(t|P_0, \dots, P_N)$ :

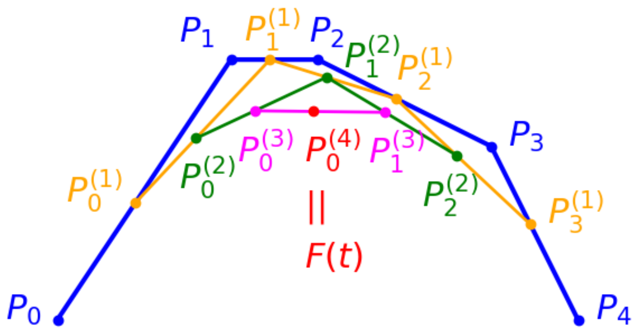
- À l'étape 1, les points de contrôle initiaux $P_k$ sont recombinés pour former $N$ nouveaux *points intermédiaires* notés $P_k^{(1)}$, via la formule

$$P_k^{(1)} = (1-t)P_k + tP_{k+1}$$

- À l'étape 2, les points $P_k^{(1)}$ sont à leur tour recombinés, suivant la même formule, pour former $N-1$ nouveaux points intermédiaires $P_k^{(2)}$.
- À l'étape 3, les points $P_k^{(2)}$ sont recombinés pour former $N-2$ nouveaux points $P_k^{(3)}$.
- ...
- À l'étape $N$, il ne reste plus qu'un unique point $P_0^{(N)}$. Il correspond à $F(t|P_0,\ldots,P_N)$.

*Ci-dessous, la procédure est illustrée pour $N=4$, c'est-à-dire cinq points de contrôle initiaux $P_0,\ldots,P_4$ :*




## 3.2 Méthode en coordonnées : Formule explicite

Il existe aussi une **formule explicite** qui donne directement la valeur de $F(t|P_0,\ldots,P_N)$ en fonction de $t$ et des points $P_0,\ldots,P_N$, **sans utiliser de relation de récurrence**.

### 3.2.1 Cas $N = 1, 2, 3$

- *(Ordre 1)* En se basant sur les équations de récurrence, on retrouve la formule explicite (= directe) donnant la valeur de $F(t|P_0,P_1)$ en fonction de $t$, $P_0$ et $P_1$ :

$$F(t|P_0,P_1) = (1-t)P_0 + tP_1$$

  et on remarque que les coefficients $1-t$ et $t$ sont des polynômes en $t$ de degré 1.

- *(Ordre 2)* De même, on retrouve la formule explicite donnant la valeur de $F(t|P_0,P_1,P_2)$ en fonction de $t$, $P_0$, $P_1$ et $P_2$ :

$$F(t|P_0,P_1,P_2) = (1-t)^2P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2P_2$$

  où les coefficients sont des polynômes en $t$ d'ordre 2.

- *(Ordre 3)* Enfin, on trouve une formule explicite donnant la valeur de $F(t|P_0,P_1,P_2,P_3)$ en fonction de $t$, $P_0$, $P_1$, $P_2$ et $P_3$ :

$$F(t|P_0,P_1,P_2,P_3) = (1-t)^3P_0 + 3t(1-t)^2P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3P_3$$

  où les coefficients sont des polynômes en $t$ d'ordre 3.

Les lecteurs familiers des coefficients binomiaux et du triangle de Pascal commencent probablement à voir une formule générale se profiler.

### 3.2.2 Formule explicite de Bézier, cas général

Le schéma ci-dessous représente le calcul du point $F(t|P_0,\ldots,P_N)$ (dans la figure, $N=5$) suivant la définition par récurrence des courbes de Bézier. Les points de contrôle $P_k$ correspondent à la première ligne.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
P_0 \arrow[dr, "1-t"] & & P_1 \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "1-t"] & & P_2 \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "1-t"] & & P_3 \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "1-t"] & & P_4 \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "1-t"] & & P_5 \arrow[dl, "t"'] \\
& F(t|P_0,P_1) \arrow[dr, "1-t"] & & F(t|P_1,P_2) \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "1-t"] & & F(t|P_2,P_3) \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "1-t"] & & F(t|P_3,P_4) \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "1-t"] & & F(t|P_4,P_5) \arrow[dl, "t"'] & \\
& & F(t|P_0,\dots,P_2) \arrow[dr, "1-t"] & & F(t|P_1,\dots,P_3) \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "1-t"] & & F(t|P_2,\dots,P_4) \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "1-t"] & & F(t|P_3,\dots,P_5) \arrow[dl, "t"'] & & \\
& & & F(t|P_0,\dots,P_3) \arrow[dr, "1-t"] & & F(t|P_1,\dots,P_4) \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "1-t"] & & F(t|P_2,\dots,P_5) \arrow[dl, "t"'] & & & \\
& & & & F(t|P_0,\dots,P_4) \arrow[dr, "1-t"] & & F(t|P_1,\dots,P_5) \arrow[dl, "t"'] & & & & \\
& & & & & F(t|P_0,\dots,P_5) & & & & &
\end{tikzcd}
$$

On fixe un entier $k$ entre 0 et $N$ et on s'intéresse au point de contrôle $P_k$.

- On peut vérifier que le nombre de chemins possibles dans le graphe, depuis le « point de départ » $P_k$ jusqu'au « point d'arrivée » « $F_{P_0,\dots,P_N}(t)$ » est $\binom{N}{k}$.
- Le long des chemins qui ont $P_k$ comme « point de départ », on va à droite $k$ fois et à gauche $N-k$ fois. Cela correspond à multiplier $k$ fois par « $t$ » (toutes les fois où le chemin va à gauche) et $N-k$ fois par « $1-t$ » (toutes les fois où le chemin va à droite).
- Dans la définition par récurrence des courbes de Bézier, chaque "séparation de chemin" correspond en fait à la somme de 2 termes. Au final, $F(t|P_0,\dots,P_N)$ s'obtient donc comme une somme sur *tous les chemins possibles* sur le schéma. Si on regroupe les chemins en fonction du point $P_k$ dont ils sont issus, il y a $\binom{N}{k}$ chemins à "sommer", et au cours de chacun de ces chemins le point $P_k$ "se fait multiplier" par $t^k(1-t)^{N-k}$. On obtient donc :

**Courbes de Bézier, formule explicite**

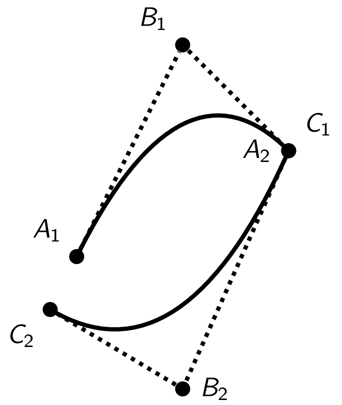
$$F(t|P_0,\dots,P_N) = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} t^k (1-t)^{N-k} P_k$$

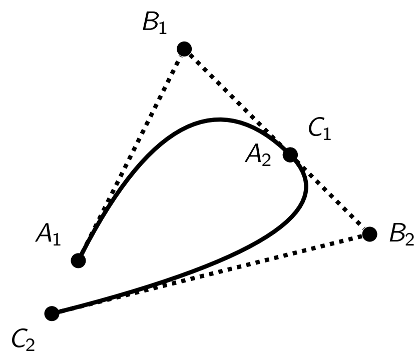
# 4 Tangentes et courbures

L'objectif de cette section est de montrer comment raccorder deux courbes de Bézier de manière lisse.

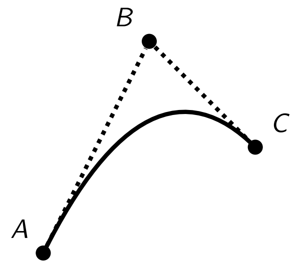
## 4.1 Courbes de Bézier quadratiques

Considérons deux courbes de Bézier quadratiques de points de contrôles respectifs $A_1, B_1, C_1$ et $A_2, B_2, C_2$, qui sont raccordées au point $C_1 = A_2$, comme sur les deux exemples des schémas ci-dessous.



À gauche, le raccordement des courbes est anguleux, ce qui correspond à deux demi-tangentes $(B_1C_1)$ et $(A_2B_2)$ qui forment un angle non plat, tandis qu'à droite ce raccordement est lisse, et cela correspond au fait que les points $B_1$, $C_1 = A_2$ et $B_2$ sont alignés.
Pour démontrer cette propriété, nous devons simplement vérifier que la tangente à la courbe en $A$ est bien la droite $(AB)$ et que la tangente à la courbe en $C$ est bien la droite $(BC)$.




Tout d'abord, avec nos notations, un vecteur directeur de la droite $(AB)$ s'obtient simplement en calculant $B - A$, et de même $C - B$ pour la droite $(BC)$.
Ensuite, rappelons qu'un vecteur directeur de la tangente au point de paramètre $t_0$ d'une courbe paramétrée est obtenu en dérivant (par rapport à $t$) l'expression $F(t)$ des coordonnées des points de la courbe, et en regardant le résultat pour $t = t_0$.
Dans notre cas, on a $F(t) = (1-t)^2A + 2t(1-t)B + t^2C$, ce qui se dérive en $F'(t) = -2(1-t)A + 2(1-2t)B + 2tC$.
Pour $t = 0$, qui correspond au point $A$, un vecteur directeur de la tangente à la courbe est donc :

$$F'(0) = -2A + 2B = 2(B - A)$$

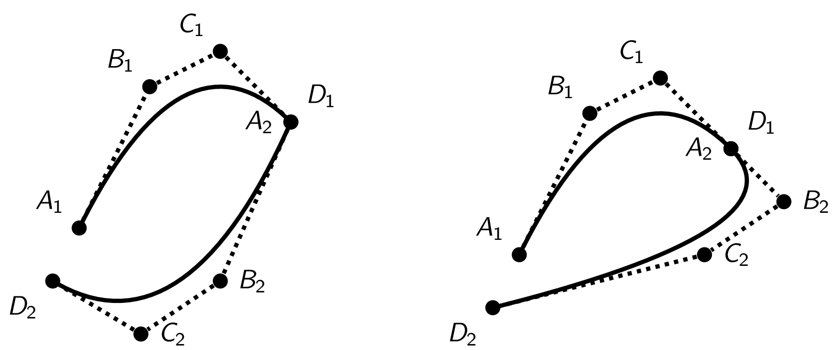
Pour $t = 1$, qui correspond au point $B$, un vecteur directeur de la tangente à la courbe est donc :

$$F'(1) = -2B + 2C = 2(C - B)$$

C'est bien ce qui était annoncé, les vecteurs directeurs sont colinéaires.

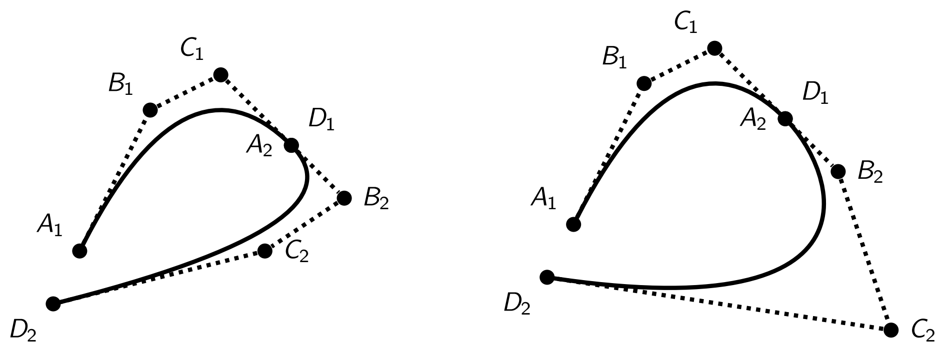
## 4.2 Courbes de Bézier d'ordre supérieur

**Tangentes** Le même raisonnement que précédemment permet de prouver que les tangentes aux extrémités $P_0$ et $P_N$ d'une courbe de Bézier d'ordre $N \geq 3$ et de points de contrôle $P_0, \ldots P_N$ sont respectivement les droites $(P_0P_1)$ et $(P_{N-1}P_N)$.
Ainsi, les deux exemples sur les schémas ci-dessous montrent que pour raccorder de façon lisse les deux courbes de Bézier de points de contrôle $A_1, B_1, C_1$ et $D_1$ d'une part et $A_2, B_2, C_2$ et $D_2$ d'autre part en $D_1 = A_2$, il suffit que les points $C_1, D_1 = A_2$ et $B_2$ soient alignés.




Le calcul consiste de nouveau à dériver $F(t|P_0, \ldots, P_N) = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} t^k(1-t)^{N-k}P_k$. Le terme en $t^k(1-t)^{N-k}$ se dérive dans le cas général en $kt^{k-1}(1-t)^{N-k} + (N-k)t^k(-1)(1-t)^{N-k-1}$. Pour $t = 0$, ces termes s'annulent tous sauf pour $k = 0$ et $k = 1$, ce qui donne $F'(0) = N(P_1 - P_0)$, et pour $t = 1$, les termes s'annulent tous sauf pour $k = N - 1$ et $k = N$, et on obtient $F'(1) = N(P_N - P_{N-1})$.

**Courbures** Sur les schémas ci-dessous, on voit qu'il est possible de raccorder encore mieux les courbes d'ordre $\geq 3$ en leur donnant non seulement la même tangente, mais aussi la même courbure au point de raccordement.




Pour cela, il faut passer par la dérivée seconde de $F(t)$. Les calculs sont similaires mais fastidieux, aussi nous nous contenterons de donner les résultats pour une courbe d'ordre 3.
On trouve $F''(0) = 6((C - B) - (B - A))$ et $F''(1) = 6((D - C) - (C - B))$. La contrainte porte donc maintenant sur 3 points de contrôle successifs.

# Conclusion

Le point le plus important à retenir de cette fiche est la différence fondamentale entre une image matricielle, composée de pixels individuels, et une image vectorielle, composée de segments de courbes ou de formes géométriques définis chacuns par un petit nombre d'attributs. Outre leur taille mémoire plus réduite, les avantages principaux des images vectorielles sont la possibilité d'un changement d'échelle sans perte de qualité d'une part, et la possibilité d'appliquer assez facilement diverses transformations comme des rotations. En revanche, les images matricielles permettent d'obtenir une richesse de détails qui n'est limitée que par les capacités optiques des capteurs utilisés.
Les courbes de Bézier ne sont qu'un des outils permettant de créer des images vectorielles. Nous pouvons aussi citer par exemple les splines, les B-splines ou les NURBS, des versions de plus en plus générales du même concept. Il existe aussi des surfaces de Bézier, permettant de générer des objets en 3D, très utilisées dans le domaine de la Conception Assistée par Ordinateur (CAO).