

# 77 nuances de couleurs

Quentin Bramas<sup>1</sup>, Stéphane Devismes<sup>2</sup>, Anaïs Durand<sup>3</sup>, Pascal Lafourcade<sup>3</sup>  
et Anissa Lamani<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Université de Strasbourg, ICUBE, CNRS

<sup>2</sup>Université de Picardie Jules Verne, MIS UR 4290, Amiens

<sup>3</sup>Université Clermont Auvergne, Clermont Auvergne INP, CNRS, LIMOS

---

Nous nous intéressons à l'exploration d'un environnement 3D par un petit nombre de robots aux capacités très limitées. Les robots sont complètement désorientés, autrement dit, ils ne s'accordent pas sur un système de coordonnées ni même une chiralité. Leurs capteurs ont une portée bornée. Ils sont néanmoins équipés de lumières pouvant changer de couleur. Le nombre de couleurs possibles est borné et ces couleurs sont les seules informations qu'un robot peut mémoriser et qui sont perçues par les autres robots à proximité. Sous ces hypothèses, nous étudions la possibilité de coordonner de tels robots pour qu'ils visitent infiniment souvent chaque nœud d'une grille 3D. Nous montrons que trois robots avec une visibilité à distance 1 ne sont pas suffisants pour résoudre le problème avec un algorithme bien défini (c'est-à-dire, n'utilisant aucune règle ambiguë dont la destination dépend de l'orientation du robot). Nous proposons donc deux algorithmes, tous deux pour trois robots : le premier est bien défini, utilise quatre couleurs mais requiert une visibilité à distance deux, le second ne requiert qu'une visibilité à distance 1, mais utilise 77 couleurs et est ambigu.

**Mots-clefs :** Robots lumineux, exploration perpétuelle, grille finie 3D, absence de chiralité.

---

## 1 Introduction

Cet article s'intéresse au problème de l'*exploration perpétuelle* d'un environnement discret par une flotte de robots autonomes *synchrones* équipés de capteurs de visibilité, d'actionneurs de mouvement et de lumières pouvant changer de couleur. L'environnement est modélisé par un graphe dont les nœuds doivent être visités infiniment souvent par au moins un robot. Les robots considérés, dits *lumineux*, ont des capacités très limitées. La portée de leur capteurs est bornée : la visibilité  $\phi$  est bornée. Ils disposent d'un système d'orientation très faible, puisqu'ils n'ont pas de système de coordonnées commun (par exemple, il n'y a pas d'accord préalable sur l'orientation Nord-Sud) ni même de chiralité commune. L'absence de chiralité commune signifie qu'un robot ne peut pas distinguer les deux côtés d'une symétrie axiale selon l'un des axes de son système d'orientation. Enfin, les robots n'ont pas de mémoire persistante en dehors de leurs lumières, dont le nombre de couleurs est limité. Ces lumières sont également leur seul moyen de communication, un robot pouvant voir la couleur des autres robots à proximité, en fonction de la visibilité  $\phi$ .

Sous ces hypothèses, le problème de l'exploration perpétuelle a été étudié dans des environnements variés, par exemples les grilles 2D finies [6, 9] ou infinies [5, 7] ou les tores [8]. Cependant, dans les grilles 3D, ce problème n'a été étudié que dans un cas plus favorable où les robots partagent une même chiralité [3]. Cela signifie que les robots s'accordent sur le côté à choisir en cas de symétrie axiale.

**Contributions.** Nous nous intéressons donc à l'*exploration perpétuelle d'une grille 3D* par une flotte de robots ne partageant pas nécessairement *la même chiralité*. L'objectif est de proposer des algorithmes, résolvant ce problème, qui minimisent les ressources utilisées, autrement dit en utilisant un nombre minimum de robots lumineux employant un nombre minimum de couleurs et dont la visibilité est la plus limitée possible.

Tout d'abord, nous montrons que 3 robots, dont les capteurs ont une visibilité limitée à la distance 1, ne sont pas suffisants pour résoudre le problème avec un algorithme *bien défini*. Il s'agit d'algorithmes déterministes où le déplacement des robots est entièrement déterminé par la vue qu'ils ont de leur environnement, en dépit de la désorientation du robot. Dans le cas contraire (dit ambigu), certaines destinations du robot ne sont pas déterminés à l'avance et le choix entre plusieurs destinations ambiguës est fixé par un

adversaire en influençant le système de coordonnées du robot. Il en résulte une exécution non-déterministe de l'algorithme.

Nous proposons ensuite deux algorithmes optimaux (en nombre de robots et visibilité) qui, tout deux, utilisent trois robots. Le premier algorithme est bien défini, utilise quatre couleurs et requiert une visibilité à distance deux. Le second algorithme requiert une distance de visibilité plus courte, à distance 1, mais est ambigu et utilise 77 couleurs.

**Plan.** Notre modèle de calcul est brièvement présenté en section 2. Ensuite, nous présentons les principales idées de notre preuve d'impossibilité en section 3. Puis nous décrivons nos deux algorithmes, respectivement dans les sections 4 et 5. Nous concluons en section 6. Tous les détails omis par manque de place sont disponibles dans notre rapport technique [4].

## 2 Modèle

Nous considérons un essaim de  $n$  robots lumineux évoluant dans une grille 3D de taille  $x \times y \times z$ , c.-à-d., un graphe non-orienté  $G = (V, E)$  où  $V = \{(i, j, k) : i \in [0..x - 1], j \in [0..y - 1], k \in [0..z - 1]\}$  et  $E = \{(i, j, k), (i', j', k') \in V^2 : |i - i'| + |j - j'| + |k - k'| = 1\}$ . Ces coordonnées sont utilisées uniquement pour le raisonnement : elles sont inconnues des robots. Les nœuds de degré 6 sont les nœuds *internes* de la grille alors que les autres sont des nœuds *bordures*. En particulier, les nœuds de degré 3 sont nommés les *coins* de la grille.

Les robots effectuent une infinité de *rondes* durant lesquelles chaque robot exécute un cycle « *Regarder-Calculer-Se Déplacer* » de manière synchrone. À chaque ronde, chaque robot *regarde* autour de lui : il obtient une *vue* du sous-graphe des nœuds situés à distance (de Manhattan) au plus  $\Phi \geq 1$  de lui. À partir de cette vue, le robot *calcule* sa nouvelle couleur et sa destination, et *se déplace* vers cette destination en changeant la couleur de sa lumière (*n.b.*, le robot peut choisir de rester immobile et/ou garder la même couleur). Dans une vue, les nœuds sont, le cas échéant, étiquetés avec les couleurs des robots les occupant. Dans les vues et dans les traces d'exécutions, nous matérialisons l'absence de nœuds par une bordure extérieure constituée de nœuds virtuels colorés en noir pour une meilleure lisibilité. Les bordures extérieures sont appelées *murs*.

En outre, la vue est orientée selon un système de coordonnées ego-centré choisi par un *adversaire* à chaque ronde, ce qui modélise l'absence d'orientation globale et de chiralité commune. Ainsi, l'orientation d'un robot  $r$  peut être différente d'une ronde à l'autre. Précisément, l'adversaire peut appliquer sur chacun des axes passant par  $r$  une rotation prise dans  $\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$  (la rotation choisie peut-être différente pour chacun des axes). Il peut en plus appliquer une symétrie axiale sur l'un des axes passant par  $r$ .

L'ensemble des couples (*position, couleur*) de tous les robots à la ronde  $t$ , définit la *configuration* du système à la ronde  $t$ . Un algorithme est décrit par un ensemble de configurations initiales possibles, un ensemble de couleurs  $\mathbb{C}$  et un ensemble de règles. L'ensemble des configurations initiales dépend de l'algorithme. Une règle associe une vue à une destination et une couleur. Si la destination globale du robot dépend de l'orientation de sa vue (choisie par l'adversaire), alors on dit que la règle est ambiguë. Un algorithme qui ne contient aucune règle ambiguë est dit *bien défini*. Sinon, il est *ambigu*.

## 3 Résultat d'impossibilité

Le problème de l'exploration perpétuelle d'une grille 3D avec une visibilité à distance 1 requiert au moins trois robots, peu importe le nombre de couleurs disponibles ou le partage d'une même chiralité et même pour un algorithme ambigu [3]. Nous montrons que ce résultat peut être étendu.

**Théorème 1** *Il n'existe pas d'algorithme bien défini pour explorer perpétuellement une grille 3D avec trois robots et une distance de visibilité 1, quelque soit le nombre de couleurs disponibles.*

*Sketch de preuve.* Supposons par contradiction qu'il existe un tel algorithme utilisant un nombre arbitrairement grand de couleurs. Considérons une grille suffisamment grande de tailles paires ayant donc quatre nœuds centraux. Au moins l'un d'entre eux,  $c$ , n'est pas occupé par un robot initialement. L'algorithme

étant supposé correct,  $c$  finit par être visité à un certain temps  $t$ . Le reste de la preuve est une étude combinatoire des différents cas possibles, en fonction de l'isolement ou non des robots (autrement dit, si un robot n'a pas d'autre robot sur un noeud adjacent). Cette étude montre qu'à partir du temps  $t$ , les mouvements non ambigus restreignent l'espace qui peut être visité à une *tranche* contenant  $c$  ou à une ligne de noeuds internes et quelques noeuds supplémentaires. Une tranche est un sous-graphe isomorphe à une grille 2D contenant quatre coins et dont les noeuds de degré trois sont des noeuds bordures de la grille. Au moins un robot devrait réaliser un mouvement ambigu pour passer sur une autre tranche. Par conséquent, visiter perpétuellement l'ensemble de la grille est impossible.  $\square$

## 4 Algorithme bien défini pour 3 robots, 4 couleurs et visibilité 2

Notre premier algorithme, noté  $A_1$ , réalise l'exploration perpétuelle pour  $n = 3$ ,  $|C| = 4$  et  $\phi = 2$ . Cet algorithme est bien défini, il est donc optimal en nombre de robots et en visibilité. Par manque de place, nous ne présentons pas les règles de l'algorithme mais seulement son principe. Les règles sont disponibles dans notre rapport technique [4]. Le lecteur est invité à suivre les explications ci-après en visualisant les animations en ligne [2].

Cet algorithme explore la grille étage par étage et chaque étage est exploré ligne par ligne, comme illustré sur la figure 1. Les couleurs et les positions relatives des robots leurs permettent de s'orienter, malgré l'absence de chiralité commune. En effet, chaque robot a un rôle déterminé par sa couleur : le *leader* (de couleur  $\textcircled{L}$  ou  $\textcircled{R}$ ), le *suiveur* (de couleur  $\textcircled{F}$ ) et le robot *arrière* (de couleur  $\textcircled{B}$ ). Les robots peuvent changer de rôle au cours de l'exploration.

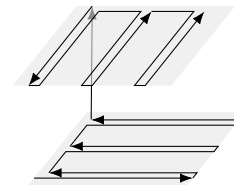


FIGURE 1 : Trajet effectué par les robots pendant l'exploration.

Initialement, chaque robot est à distance deux des deux autres robots. Le leader avec la couleur  $\textcircled{L}$  et le suiveur sont sur le même étage alors que le robot arrière est sur l'étage suivant, voir figure 2. Ce motif local (ou son symétrique) peut être placé n'importe où dans la grille. Par convention, nommons  $e_i$  l'étage du leader et suiveur,  $e_{i-1}$  l'étage du robot arrière,  $\ell_j$  la ligne du leader et du robot arrière, et  $\ell_{j-1}$  la ligne du suiveur.

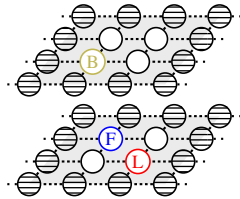


FIGURE 2 : Configuration initiale de  $A_1$ . Les noeuds hachurés peuvent être des murs ou des noeuds internes.

À partir de leurs positions initiales, les robots commencent l'exploration de la ligne  $\ell_j$  : le leader s'éloigne des autres robots en restant sur le même étage. Les deux autres robots le suivent en se déplaçant dans la même direction. Lorsqu'ils atteignent un mur, ils font demi-tour, le leader prenant la couleur  $\textcircled{R}$ . Ils reviennent de façon similaire jusqu'à atteindre le mur opposé.

Ils doivent ensuite se déplacer pour explorer la ligne suivante. Leurs positions relatives permettent de le faire sans ambiguïté : le leader se déplace sur la ligne opposée par rapport à son suiveur (c-à-d.,  $\ell_{j+1}$ ) et reprend la couleur  $\textcircled{L}$ . Les deux autres robots suivent pour se reformer le motif initial et continuer l'exploration. La figure 3 illustre ce changement de ligne.

Après avoir exploré la dernière ligne de l'étage, les robots se déplacent pour explorer le prochain étage, celui dans la direction opposée au robot arrière (c-à-d.,  $f_{i+1}$ ). À nouveau, leurs positions relatives et les murs servant de point de repère permettent aux robots de s'orienter sans ambiguïté. Ils peuvent donc commencer l'exploration de l'étage suivant de la même manière, la seule différence étant qu'ils ont effectué une rotation

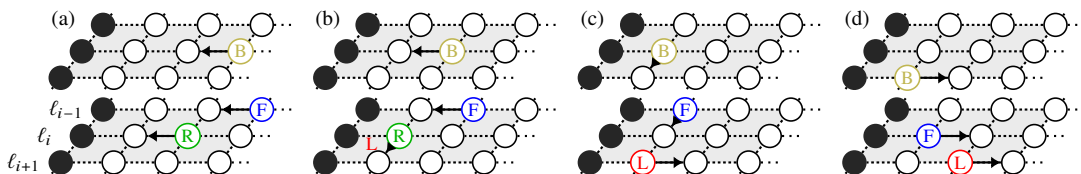


FIGURE 3 : Séquence de configurations pour changer de ligne.

de  $\frac{\pi}{2}$ . Lorsqu'ils terminent l'exploration du dernier étage, les robots changent leur direction d'exploration (de haut en bas vers de bas en haut, ou inversement). Notez qu'en faisant cela, les robots échangent leurs rôles : le robot arrière devient leader, le leader devient suiveur et le suiveur passe à l'arrière.

## 5 Algorithme pour 3 robots, 77 couleurs et visibilité 1

Le second algorithme, noté  $A_2$ , réalise l'exploration perpétuelle pour  $n = 3$ ,  $|\mathcal{C}| = 77$  et  $\phi = 1$ . Cet algorithme est ambigu, mais optimal en nombre de robots et en visibilité. À nouveau, tous les détails de l'algorithme notamment ses règles sont disponibles dans notre rapport technique [4] et le lecteur est invité à consulter les animations en ligne [1].

Le principe de l'algorithme est le même que pour l'algorithme précédent : explorer la grille étage par étage et ligne par ligne. Cependant, dans l'algorithme  $A_1$ , les positions relatives des robots leurs permettent d'« enregistrer » les trois directions d'exploration (sens d'exploration d'une ligne, direction de la prochaine ligne et direction du prochain étage). Avec une visibilité limitée à distance 1, ce n'est pas possible dans l'algorithme  $A_2$ . En effet, pour ne pas être isolés, les robots sont soit alignés, soit placés de façon à former un « L », indiquant au plus deux directions. Un robot, le *phare*, reste donc près du mur tandis que les deux autres robots, les *voyageurs*, explorent la ligne sur laquelle ils sont.

Cependant, quand les deux robots voyageurs reviennent près du mur, le phare ne peut être placé juste à côté d'eux. En effet, ils formeraient alors un « L » et seraient dans l'impossibilité de distinguer la prochaine ligne du prochain étage. Le phare (de couleur ⑩) est donc placé le long du mur sur une diagonale par rapport au premier robot voyageur. Il est à distance deux dans une direction et à distance 1 orthogonalement par rapport à la ligne explorée par les voyageurs (de couleur ① et ⑪, respectivement), voir la figure 4. Le robot ① doit se déplacer mais ne peut pas distinguer les quatre directions indiquées sur la figure 4, donc le déplacement réalisé sera choisi par l'adversaire.

L'idée principale de cet algorithme est de réaliser un processus de recherche, pendant lequel les robots voyageurs vont chercher le phare dans les quatre directions possibles. Par une série de mouvements ambigus, ils finissent par devenir adjacent au phare, quels que soient les choix de l'adversaire. Seul le nombre d'étapes nécessaires pour retrouver le phare dépend des choix de l'adversaire. Ce processus de recherche est répété à chaque changement de ligne. Puis, un processus similaire est utilisé pour changer d'étage et pour recommencer l'exploration dans l'autre direction lorsque le dernier étage a été exploré. L'inconvénient de cette technique de recherche est l'important nombre de couleurs nécessaires pour distinguer les différentes étapes de la recherche, menant à un total de 77 couleurs nécessaires pour cet algorithme.

Pour simplifier l'algorithme, la position de départ est fixée comme indiqué dans la figure 4. Cependant, il serait possible de faire en sorte que l'algorithme puisse démarrer à partir d'un motif local, comme c'est le cas pour l'algorithme  $A_1$ .

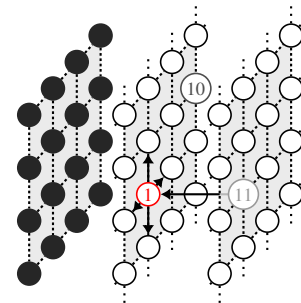


FIGURE 4 : Positions des robots lorsque les voyageurs reviennent vers le mur.

## 6 Conclusion

Nous avons montré qu'il est possible de résoudre l'exploration perpétuelle d'une grille 3D avec trois robots sans chiralité, soit le même nombre que dans le cas où les robots partagent une même chiralité. Cependant, nous avons montré qu'avec trois robots, une visibilité à distance deux est nécessaire pour résoudre ce problème avec un algorithme bien défini.

Parmi les questions ouvertes, il serait intéressant d'étudier la possibilité d'utiliser moins de 77 couleurs en visibilité à distance 1. Une autre question ouverte est la possibilité de résoudre ce problème avec des robots amnésiques (c-à-d., sans couleurs). Nous supposons qu'un tel algorithme nécessitera une plus grande distance de visibilité et un plus grand nombre de robots.

## Références

- [1] Quentin Bramas. Animation du deuxième algorithme, 2026. <https://robots.app.bramas.fr/?unpublished/7>.
- [2] Quentin Bramas. Animation du premier algorithme, 2026. <https://robots.app.bramas.fr/?unpublished/8>.
- [3] Quentin Bramas, Stéphane Devismes, Anaïs Durand, Pascal Lafourcade, and Anissa Lamani. Beedroids : How luminous autonomous swarms of uavs can save the world? In *FUN'22 - 11th International Conference on Fun with Algorithms, May 30-June 3, 2022, Island of Favignana, Sicily, Italy*, pages 7 :1–7 :21, 2022.
- [4] Quentin Bramas, Stéphane Devismes, Anaïs Durand, Pascal Lafourcade, and Anissa Lamani. 77 shades of grey. 2026. <https://uca.hal.science/hal-05504522v1>.
- [5] Quentin Bramas, Stéphane Devismes, and Pascal Lafourcade. Infinite grid exploration by disoriented robots. In Chryssis Georgiou and Rupak Majumdar, editors, *NETYS'20 - 8th International Conference on Networked Systems, June 3-5, 2020, Marrakech, Morocco*, pages 129–145, 2020.
- [6] Quentin Bramas, Stéphane Devismes, and Pascal Lafourcade. Optimal Exclusive Perpetual Grid Exploration by Luminous Myopic Opaque Robots with Common Chirality. In *ICDCN'21 - International Conference on Distributed Computing and Networking, 5-8 January, 2021, Virtual Event, Nara, Japan*, pages 76–85, 2021.
- [7] Quentin Bramas, Pascal Lafourcade, and Stéphane Devismes. Finding water on poleless using melomaniac myopic chameleon robots. In *FUN'21 - 10th International Conference on Fun with Algorithms, May 30-June 1, 2021, Favignana Island, Sicily, Italy*, pages 6 :1–6 :19, 2021.
- [8] Stéphane Devismes, Anissa Lamani, Franck Petit, and Sébastien Tixeuil. Optimal torus exploration by oblivious robots. *Computing*, 101(9) :1241–1264, 2019.
- [9] Arthur Rauch, Quentin Bramas, Stéphane Devismes, Pascal Lafourcade, and Anissa Lamani. Optimal exclusive perpetual grid exploration by luminous myopic robots without common chirality. In Karima Echihabi and Roland Meyer, editors, *NETYS'21 - 9th International Conference on Networked System, May 19-21, 2021, Virtual Event*, pages 95–110, 2021.